CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”
Etapa locală, 19.02.2017

Filiera teoretică: profil real, specializarea ştiinţele naturii
Clasa a XI-a

1. Să se arate că dacă $A \in M_2(\mathbf{C})$, $A \neq O_2$ și există un număr natural n, $n > 0$ astfel încât $A^n = O_2$ atunci $A^2 = O_2$.
2. Se consideră funcția de gradul al doilea $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ cu $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$ și matricele $A = \begin{pmatrix} c & b & a \\ a & c & b \\ b & a & c \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$și $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x_1 & x_2 \\ 1 & {x_1}^2 & {x_2}^2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{C})$, unde x_1 și x_2 sunt rădăcinile ecuației $x^2 + x + 1 = 0$.
   a) Să se arate că $|det(B)| = 3\sqrt{3}$
   b) Să se arate că $A \cdot B = \begin{pmatrix} f(1) & f(x_1) & f(x_2) \\ f(1) & x_1 f(x_1) & x_2 f(x_2) \\ f(1) & {x_1}^2 f(x_1) & {x_2}^2 f(x_2) \end{pmatrix}$
   c) Să se arate că $det(A) = 0$ dacă și numai dacă $a + b + c = 0$ sau $a = b = c$.
3. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \setminus \{-1, 0\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2(x+1)^2}$.
   a) Să se determine asimptotele verticale ale graficului funcției
   b) $g: \boldsymbol{D} \to \mathbf{R}, g(x) = ln(f(x))$, unde $\boldsymbol{D}$ este domeniul maxim de definiție la funcției g
   c) Să se calculeze $\lim\limits_{x \to \infty} \left[f(1) + f(2) + \ldots + f(x)\right]^{x^2}$
   d) Să se calculeze $\lim\limits_{x \to \infty} x^3 \cdot \left[2017^{f(x)+1} - 2017\right]$
4.
   a) Pentru ce valori n$\in \mathbb{N}^*$, are loc egalitatea
   $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x + 2\sin 2x + \cdots + n\sin nx}{x + x^2} = 30$$
   b) Să se calculeze: $\lim\limits_{x \to \infty} a\sqrt{x+1} + b\sqrt{x+2} + c\sqrt{x+3}$, discuție după $a, b, c \in \mathbb{R}$

Notă:
Timp de lucru 3 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7